30 SEPT 2013



Université Moulay Ismaïl
Faculté des Sciences Juridiques
Economiques et Sociales – Meknès

Filière Sciences Economiques et Gestion
- Troisième Semestre -
Année Universitaire 2013 / 2014

TD d'Algèbre
Série N° 1
(Espaces Vectoriels)

Exercice 1: Parmi les ensembles suivants, lesquels sont des espaces vectoriels sur IR ? (justifier).

1) $A = \{(x, y, z) \in IR^3 \, / \, x + y - z = 0\}$
2) $B = \{(x, y, z) \in IR^3 \, / \, x + y - z = 1\}$
3) $C = \{(x, y, z) \in IR^3 \, / \, x + y - z^2 = 0\}$
4) $D = \{(x, y, z) \in IR^3 \, / \, x\,y\,z = 0\}$
5) $E = \{(x, y, z) \in IR^3 \, / \, x + y + 2z \geq 0\}$

Exercice 2: Soit E un IK-espace vectoriel ($IK = IR \; ou \; C$) et soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Montrer que $F \cap G$ est un sous-espace vectoriel de E.

Exercice 3:.Soit E un espace vectoriel sur IR et soient v_1, v_2 et v_3 trois vecteurs linéairement indépendants de E.
Soient $w_1 = v_1 + v_2, w_2 = v_1 + v_3$ et $w_3 = v_2 + v_3$. Montrer que le système $\{w_1, w_2, w_3\}$ est libre.

Exercice 4: Soient $A = \{(x, y, z, t) \in IR^4 \, / \, x + y = 0 \;\; et \;\; z + t = 0\}$
et $B = \{v \in IR^4 \, / \, v = (a, b, 3a, 2a), \; a, b \in IR\}$.

1) Montrer que A et B sont des espaces vectoriels sur IR.
2) Déterminer pour chacun des espaces A et B une base et la dimension.
3) Soient $v_1 = (1, -1, 2, -2)$ et $v_2 = (0, 0, -1, 1)$
   Montrer que $v_1 \in A$ et $v_2 \in A$.
   Le système $\{v_1, v_2\}$ est-il libre ou lié? Engendre-t-il A ?
4) Soient $v_3 = (1, 0, 0, 0)$ et $v_4 = (1, 1, 1, 1)$.
   Montrer que $B = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ est une base de IR^4.

Exercice 5: Soient $v_1 = (-1, 1, 0)$ et $v_2 = (1, 0, 2)$.
Soit F le sous-espace vectoriel de IR^3 engendré par v_1 et v_2.

1) A quelle condition sur x, y et z le vecteur $v = (x, y, z)$ appartient-il à F ?
2) Soit $v_3 = (0, 1, 2)$. Quel est le rang du système $\{v_1, v_2, v_3\}$?

Exercice 6: Les vecteurs $(1,1,1), (1,-1,1)$ et $(1,1,-1)$ forment-ils une base de IR^3 ? si oui, déterminer les coordonnées d'un vecteur $X = (x, y, z)$ dans cette base.